Zufallswege

Svenja Fischer

28. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

Diese schriftliche Ausarbeitung basiert auf dem Seminarvortrag „Zufallswege“, welcher im Rahmen des Seminars „Simulation von Zufallszahlen“ am 28. Juni 2021 gehalten wurde. Der Vortrag und die Ausarbeitung beziehen sich hauptsächlich auf das Buch von Norbert Henze [1]. Deswegen werden in der folgenden Arbeit nur alle abweichenden Quellenverweise notiert. Außerdem werden nur die Beweise notiert, die im Vortrag ebenfalls erwähnt wurden. Alle fehlenden Beweise können ebenfalls in [1] nachgelesen werden.

1 Ursprung und Grundlage

Der Begriff Zufallsweg (Irrfahrt, Irrweg) (engl. Random walk) stammt aus einer Konversation zwischen Karl Pearson und Lord Rayleigh aus dem Journal *Nature* aus dem Jahr 1905. Hier fragte Pearson nach einer Lösung für folgendes Problem:

> „Ein Mann startet von einem Punkt O aus und geht l Yards geradeaus. Dann dreht er sich um einen rein zufälligen Winkel und geht wieder l Yards geradeaus. Er wiederholt diesen Vorgang n-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach n solcher Wegstrecken sein Abstand zum Ausgangspunkt O zwischen r und r + δr liegt?“ [2]

Lord Rayleigh konnte ihm bereits eine Woche später antworten[3] und Pearson bedankte sich in der darauffolgenden Woche und resümierte:

> „Wir können aus der Lösung von Lord Rayleigh die folgende Lehre ziehen: In offenem Gelände ist der wahrscheinlichste Ort, an dem man einen Betrunkenen antrifft, der überhaupt noch auf seinen Beinen stehen kann, irgendwo in der Nähe seines Ausgangspunktes.“ [4]

Ein Zufallsweg ist ein mathematisches Modell, welches die zufälligen Wege eines Teilchens im ein- oder mehrdimensionalen Raum beobachtet und verknüpft. Dieser stochastische Prozess besitzt unabhängig und identisch verteilte Zuwächse in diskreter Zeit.

2 Eindimensionale Zufallswege

2.1 symmetrischer Fall

Ein Zufallsweg startet immer im Nullpunkt und die Zufallsvariable $X_j \in \{-1, 1\}$ modelliert zum Zeitpunkt $j \in \mathbb{N}$, den nächsten Schritt. Dabei wird bei $X_j = 1$ ein Schritt nach vorn und bei $X_j = -1$ ein Schritt nach hinten simuliert. Für X_j gilt, dass $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = 1/2$. Da beide mögliche Ausgänge mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen, heißt diese Art des Zufallswegs symmetrisch.

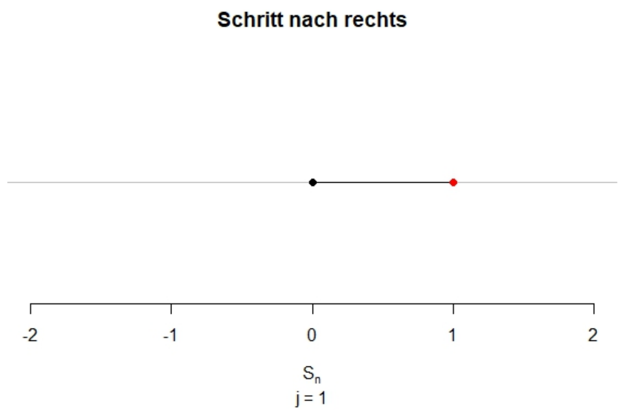

Abbildung 1: $X_j = 1$

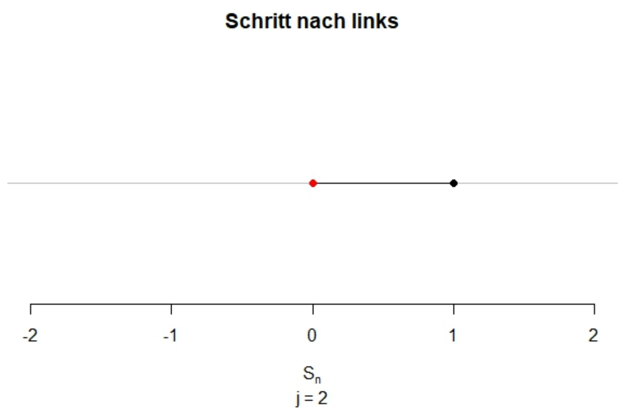

Abbildung 2: $X_j = -1$

Außerdem gilt, dass der Prozess gedächtnislos ist. Das heißt, dass $X_1, X_2, ...$ stochastisch unabhängig sind und der nächste Schritt immer nur von dem aktuellen Zustand abhängt. Durch die Gedächtnislosigkeit kann man sehr einfach die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Zufallsweges bestimmen. Wenn $k \geq 2$ und $a_1, ..., a_k \in \{1, -1\}$ die Realisierung von $X_1, \ldots, X_k$ ist, dann gilt $P(X_1 = a_1, ..., X_k = a_k) = (\frac{1}{2})^k$.
S_n beschreibt den aktuellen Zustand des Zufallsweges und berechnet sich aus Addition aller X_j, das heißt $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Um X_j zu simulieren, werden genauso viele gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt, wie Zeitschritte beobachtet werden sollen. Da die Zufallswege symmetrisch sind, wird für eine Zufallszahl kleiner als $\frac{1}{2}$ ein Schritt nach vorn und bei einer Zufallzahl größer als $\frac{1}{2}$ ein Schritt nach hinten ausgeführt. [5] Mathematisch macht es keinen Unterschied, welche Verteilung genutzt wird, solange sie so partitionierbar ist, dass Elemente aus beiden Teilen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen werden können. Da die Gleichverteilung allerdings mit dem wenigsten Aufwand zu berechnen ist, wird diese hier genutzt.

Da die die Darstellung wie in den Abbildungen 1 und 2 mit steigender Länge des Zufallsweges sehr unübersichtlich werden, gibt es eine alternative Darstellungsform. Hier wird die x-Achse zu der y-Achse und auf der x-Achse werden die Zeitschritte abgetragen.

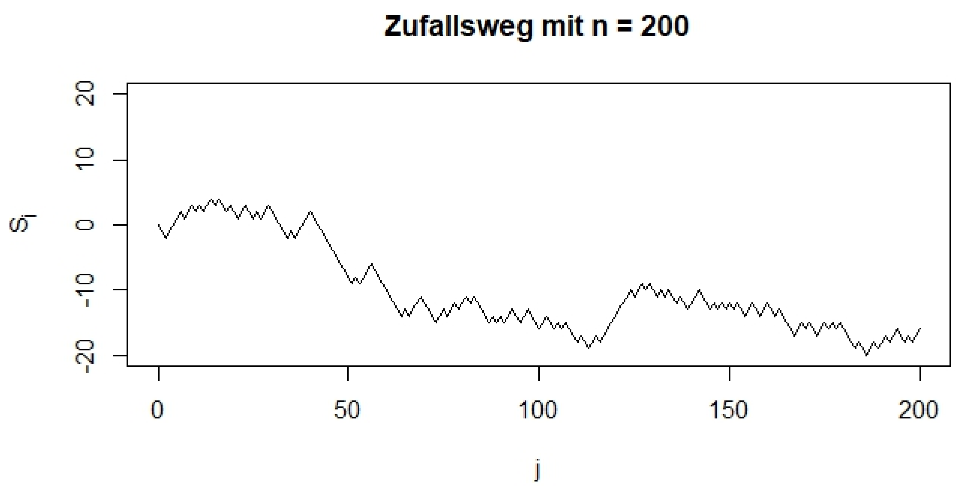

Abbildung 3: alternative Darstellung mit Zufallsweg der Länge 200

In dieser Form startet der Zufallsweg weiterhin im Nullpunkt $(0, 0)$ und wird durch $(a_1, ..., a_k) \in \{-1, 1\}^k$ beschrieben. Der Polygonzug selbst besteht aus den Punkten $(0, s_0), (1, s_1), ..., (k, s_k)$ mit $s_m = a_1 + \cdots + a_m$, welche miteinander verbunden werden.
Ein Weg der Länge k heißt k-Weg und s_m bezeichnet die Höhe im Zeit-

punkt m. Ein Zufallsweg in der Art von Abbildung 3 hat eine Nullstelle bei einem Punkt $(j, 0)$ für $1 \leq j \leq k$. Der Startpunkt ist keine Nullstelle.

Anzahl der Wege

Für die Anzahl an k-Wegen, also Wegen der Länge k, gilt $|W_k| = 2^k$. Diese Anzahl umfasst alle Wege die vom Nullpunkt starten und k Schritte gehen. Dabei ist es egal an welchem Punkt der Weg endet. Wenn die Wege allerdings einen definierten Endpunkt haben sollen, verringert sich die Zahl der möglichen Wege deutlich.

Lemma 1:

a) Um die Anzahl der k-Wege vom Ursprung zu einem festen Endpunkt (k, b) zu bestimmen müssen einige Annahmen getroffen werden.
Sei $b \geq 0, b \leq k$ und haben b und k die gleiche Parität. Dann gilt:
$|\text{k-Wege mit } s_k = b| = \binom{k}{\frac{b+k}{2}}$

b) Soll die Anzahl der Wege von einem allgemeinen Startpunkt (c, d) zu einem festen Endpunkt (u, v) bestimmt werden, müssen die Annahmen aus a) angepasst werden.
Sei $c \leq u$, $v \geq d$ und $v \leq u$. Außerdem muss die Parität von $u - c$ und $v - d$ identisch sein. Dann gilt:
$|\text{Wege mit } s_c = d \text{ und } s_u = v \text{ als Start- und Endpunkt}| = \binom{u-c}{\frac{v-d+u-c}{2}}$

Beweis:

a) Setzte die Anzahl der Aufwärtsschritte auf $|a_j = 1| = c$. Daraus folgt für die Anzahl der Abwärtsschritte $|a_j = -1| = k - c$. Da die Höhe b eine Kombination aus den Auf- und Abwärtsschritten ist, gilt: $b = c - (k - c) = 2c - k \Rightarrow c = \frac{b+k}{2}$
Ein k-Weg wird durch $(a_1, ..., a_k)$ definiert und es müssen von den k Elementen $\frac{b+k}{2}$ auswählt werden. Dies entspricht der Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{k}{\frac{b+k}{2}}$.

b) Um a) anwenden zu können wird der Weg so verschoben, dass der Startpunkt im Ursprung liegt, dass heißt $(c, d) = (0, 0)$. Damit werden die Anzahl der Weg von $(0, 0) = (c, d)$ nach $(u-c, v-d)$ gesucht und da alle Voraussetzungen aus a) erfüllt sind kann diese Aussage angewendet werden. Das entspricht $\binom{u-c}{\frac{v-d+u-c}{2}}$.

$\square$

Aufgrund der Symmetrie gilt das Ergebnis genauso für Wege von $(0, 0)$ nach (k, b) für $b \leq 0$

Im Folgenden werden die Klassen von Zufallswegen beschrieben, welche hier genannt werden:

a) $|W_{2n}^{\circ}|$: Ein $2n$-Brückenweg, der im Nullpunkt startet und im Schritt $2n$ wieder den Nullpunkt erreicht.

b) $|W_{2n,\geq 0}|$: Ein nicht-negativer $2n$-Weg, mit $s_i \geq 0, \forall i \in [0, 2n]$

c) $|W_{2n,\leq 0}|$: Ein nicht-positiver $2n$-Weg, mit $s_i \leq 0, \forall i \in [0, 2n]$

d) $|W_{2n,\neq 0}|$: Ein nullstellenfreier $2n$-Weg , mit $s_i \neq 0, \forall i \in [1, 2n]$

Für den Beweis des folgenden Lemmas wird noch das Spiegelungsprinzip benötigt. Dieses entspricht einer Bijektion zwischen zwei Mengen M_1 und M_2 über eine Spiegelachse. Mit der Spiegelung an einer geeignet gewählten Achse entspricht die Kardinalität von M_1 der von M_2. Aufgrund der Symmetrie gilt auch die Umkehrung.

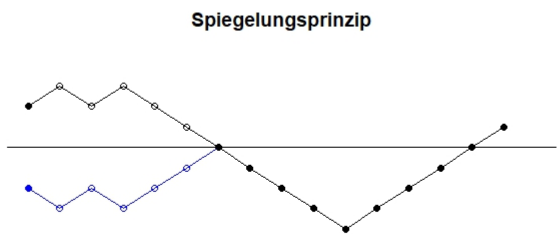

Abbildung 4: Spiegelungsprinzip

Lemma 2:
Es gibt mehrere Arten von speziellen Zufallswegen. Einige davon haben dieselbe Kardinalität, obwohl sie kaum etwas gemeinsam haben.
$|W_{2n}^{\circ}| = |W_{2n,\geq 0}| = |W_{2n,\leq 0}| = |W_{2n,\neq 0}| = \binom{2n}{n}, n \geq 1.$

Beweis:
Um das Lemma zu beweisen wird jeweils gezeigt, dass sich zwischen den Mengen eine Bijektion bilden lässt.

1. Um die erste Gleichheit zu beweisen, wird für die Injektion gezeigt, dass man einen beliebigen Brückenweg auf einen eindeutigen nicht-negativen Weg abbilden kann. Um hierbei die Eindeutigkeit zu zeigen, wird eine mehrfache Fallunterscheidung benötigt, die im Rahmen dieser Ausarbeitung leider nichtmöglich ist. Generell erfolgt die Umformung eines Brückenwegs in einen nicht-negativen Weg

jedoch nach folgendem Prinzip: Der Teilweg von Schritt 0 bis m wird abgeschnitten, wobei S_m das erste Minimum des Zufallsweges darstellt. Dieser Teilweg wird an der Ordinate gespiegelt und an $(2n, S_{2n})$ wieder angehangen. Dann wird der Punkt (m, S_m) als neuer Startpunkt definiert und der Zufallsweg so verschoben, dass er im Nullpunkt startet. Dieser Zufallsweg ist jetzt ein nicht-negativer Weg.
Die zugehörige Abbildung $f : |W^{\circ}_{2n}| \to |W_{2n,\geq 0}|$ ist wie folgt definiert: Für einen beliebigen Brückenweg w sei
$k_0(w) := \min\{k \in 1, ..., 2n : a_1 + ... + a_k = \min(w)\}$ die erste Stelle, an der ein Minimum angenommen wird. Falls $\min(w) = 0$ ist der Brückenweg bereits ein nicht-negativer Weg und $f(w) = w$. Für $\min(w) \leq 0$ folgt, dass
$f(w) := (a_{k_0+1}, \ldots, a_{2n}, -a_{k_0}, -a_{k_0-1}, \ldots, -a_1)$. Diese Abbildung ist laut [1] durch die Abbildungsvorschrift eindeutig.

Für die Surjektion wird gezeigt, dass man jeden nicht-negativen Weg auf einen Brückenweg abbilden kann. Dazu wird der Teilweg von Schritt p bis Schritt $2n$ abgeschnitten, wobei S_p der letzte Punkt mit $S_p = \frac{1}{2}S_{2n}$ des Zufallsweges darstellt. Dieser Teilweg wird an der senkrechten Achse durch S_{2n} gespiegelt und am Ursprung wieder angehangen. Der neue Startpunkt wird so verschoben, dass er im Nullpunkt liegt. Dieser Zufallsweg ist jetzt ein Brückenweg. Auch hier wird laut [1] die Eindeutigkeit durch Umkehrung der obrigen Abbildungsvorschrift erreicht.

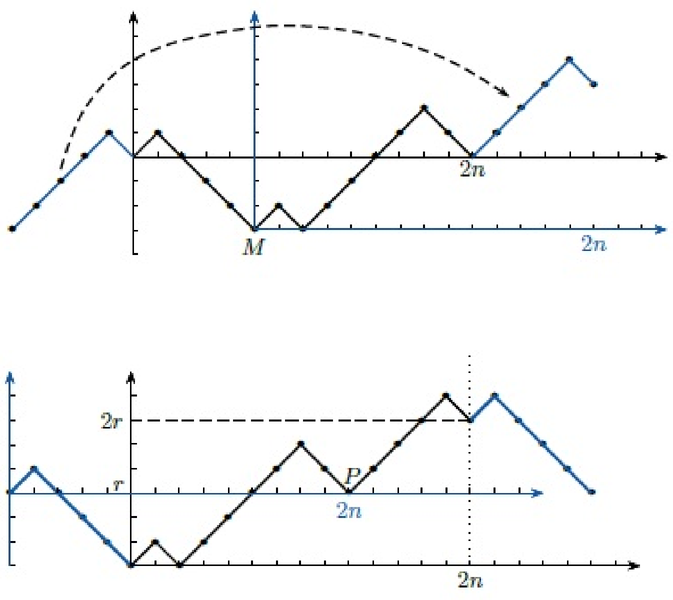

Abbildung 5: Lemma 2: Bijektion zwischen einem Brückenweg a) und einem nicht-negativen Weg b)

2. Um die zweite Gleichheit zu beweisen, wird das Spiegelungsprinzip angewendet. Damit folgt direkt, dass es eine Bijektion zwischen $|W_{2n,\geq 0}|$ und $|W_{2n,\leq 0}|$ gibt.

3. Um das dritte Gleichheit zu beweisen betrachtet man die Menge der nicht-negativen Zufallswege. Diese wird in die Menge der nicht-negativen Zufallswege ohne und mit Nullstelle partitioniert: $|W_{2n,\geq 0}| = |W_{2n,>0}| \cup |(W_{2n,\geq 0} \setminus W_{2n,>0})|$
Wenn es eine Bijektion zwischen $|W_{2n,>0}|$ und $|(W_{2n,\geq 0} \setminus W_{2n,>0})|$ gibt, folgt dass $|W_{2n,\geq 0}| = 2|W_{2n,>0}|$. Mit dem Spiegelungsprinzip gilt, dass $2|W_{2n,>0}| = |W_{2n,\neq 0}|$ und daraus folgt dann die Behauptung.
Die Bijektion zwischen nicht-negativen Weg ohne Nullstellen und nicht-negativen Wegen mit Nullstellen kann wie folgt konstruiert werden: Um die Injektion zu zeigen wählt man einen beliebigen Weg aus
$(W_{2n,\geq 0} \setminus W_{2n,>0})$ und verändert die Laufrichtung im Schritt vor der ersten Nullstelle $(a, 0)$ von unten nach oben. Der ab $(a, 0)$ nachfolgende Teilweg wird um zwei Einheiten nach oben verschoben. Dadurch entsteht ein positiver nullstellenfreier Weg. Da paarweise verschiedene Wege entweder die erste Nullstelle an unterscheidlichen Stellen haben oder bei gleicher erster Nullstelle einen unterschiedlichen Verlauf haben, ordnet diese Abbildungsvorschrift jedem nicht-negativen Weg mit Nullstellen einen eindeutig bestimmten nicht-negativen nullstellenfreien Weg zu.
Für die Surjektion wähle ein Element aus $|W_{2n,>0}|$ und verändere die Laufrichtung im Schritt nach dem letzten Punkt mit Höhe 1 $(b, 1)$ von oben nach unten und verschiebe den nachfolgenden Weg um 2 Einheiten nach unten. Mit der gleichen Begründung wie oben liegt hier eine eindeutige Abbildung vor.

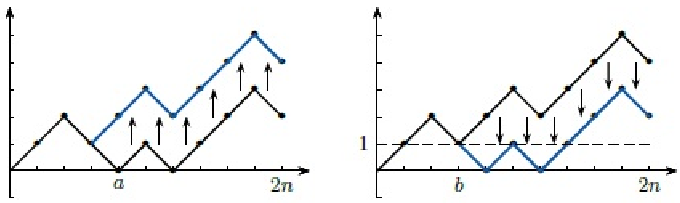

Abbildung 6: Lemma 2: Bijektion zwischen einem nicht-negativen Weg b) und einem nullstellenfreien Weg d)

4. Die oben gezeigten Mengen haben nicht nur gemeinsam, dass sie alle gleich mächtig sind, sondern dass auch eindeutig ihre Kardinalität bestimmt werden kann. Dazu wird hier jetzt die Menge der Brückenwege genommen und es ist zu zeigen, dass $|W_{2n}^{\circ}| = \binom{2n}{n}$.
   Mit Lemma 1 folgt, dass die Menge der $2n$-Zufallsweg von $(0,0)$ nach (k,b) $\binom{k}{\frac{b+k}{2}}$ Elemente hat. Auf die Menge der Brückenwege angewendet bedeutet das, dass Zufallswege von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ betrachtet werden und daraus folgt, dass $|W_{2n}^{\circ}| = \binom{2n}{\frac{2n}{2}} = \binom{2n}{n}$

□

Nullstellen

Ein Zufallsweg der Länge k besitzt

$N_k = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathbf{1}\{S_{2j} = 0\} = |\{j \in \{1,2,...,\lfloor k/2 \rfloor\} : s_{2j} = 0\}|$ viele Nullstellen.

Satz 1:

1. Bei einem Zufallsweg der Länge $2n$ gilt für
   $N_{2n} : \mathbb{P}(N_{2n} = j) = \frac{2^j \binom{2n-j}{n}}{2^{2n}}$ für $j = 1, ..., n$.
2. $\mathbb{E}(N_{2n}) = (2n+1)\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} - 1$
3. Die mittlere Anzahl der Nullstellen eines $2n$-Weges wächst proportional zur Wurzel aus der Weglänge.

Beweis von Teil 1:

Es gibt 2^{2n} Zufallswege der Länge $2n$. Dies entspricht der Anzahl aller „möglichen“ Zufallswege der Länge $2n$. Um die Aussage zu beweisen muss die Anzahl der „günstigen“ Zufallswege, also alle Zufallswege der Länge $2n$ mit genau j Nullstellen, $2^j \binom{2n-j}{n}$ sein. Dabei beschreibt 2^j die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten für die Schritte nach dem Start und der ersten bis zur $(j-1)$-ten Nullstelle.
Sei M_1 die Menge aller bis zur j-ten Nullstelle nicht-negativen und nach der j-ten Nullstelle nullstellenfreien Wege. Wenn $|M_1| = \binom{2n-j}{n}$ folgt mit Hilfe des Spiegelungsprinzips für die anderen $2^j - 1$ Möglichkeiten der Satz. Betrachte jetzt einen Zufallsweg der Länge $2n$.
Sei M_2 die Menge der Zufallswege mit s_{2n-j} Schritten, die bei $-j$ enden. Daraus folgt, dass $|M_2| = \binom{2n-j}{n}$. Wenn eine Bijektion zwischen M_1 und M_2 besteht, folgt die Behauptung, dass
$|M_1| = \binom{2n-j}{n}$.

Um von den Elementen aus M_1 nach M_2 abzubilden werden die Aufwärtsschritte nach dem Start und den Nullstellen 1 bis $j-1$ weggestrichen und die entstehende Teilwege verknüpft. Der nullstellenfreie Teilweg nach der j-ten Nullstelle wird auf einen Brückenweg abgebildet. (wg. Lemma 2)
Um von den Elementen aus M_2 nach M_1 abzubilden wird der Zufallsweg in $j+1$ Teilwege unterteilt, vom jeweils ersten Schritt mit Wert $-(i-1)$ bis $-i$ für $i = 1, ..., j$ und vor jedem Teilweg ein Aufwärtsschritt eingefügt. Der Brücken-Teilweg nach dem ersten Punkt mit Wert $-j$ wird auf einen nullstellenfreien Weg abgebildet. (wg. Lemma 2)

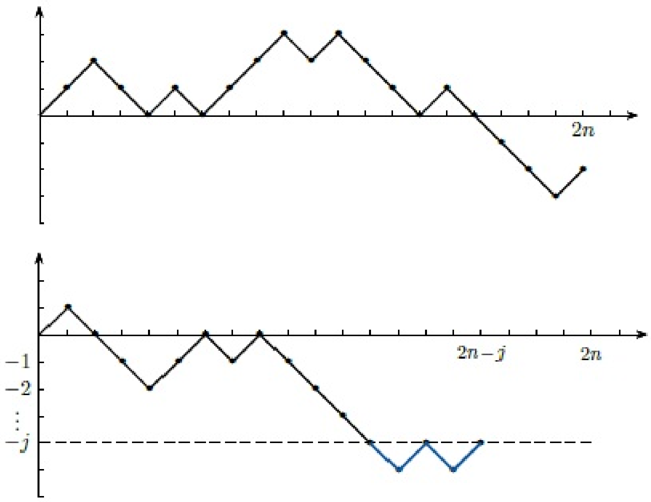

Abbildung 7: Bijektion zwischen $|M1|$ und $|M2|$ aus dem Beweis von Satz 1

$\square$

Die Erstwiederkehrzeit bezeichnet die Anzahl der Schritte, bis der Zufallsweg zum ersten Mal wieder auf den Nullpunkt trifft:
$W := \inf\{2k : k \in \mathbb{N} \text{ und } S_{2k} = 0\}$. Dabei existiert das Infimum nicht immer, jedoch fast sicher.

Satz 2:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsweg nach genau $2n$ Schritten zur Nullstelle zurückkehrt, ist: $\mathbb{P}(W = 2n) = \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \frac{1}{2n}, n \geq 1$.
2. $\mathbb{P}(W < \infty) = 1$
3. $\mathbb{E}(W) = \infty$

Beweis:

1. Diese Wahrscheinlichkeit kann auch als die Subtraktion der Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsweg mehr als $2n+2$ Nullstellen hat von der Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsweg mehr als $2n$ Nullstellen hat, beschrieben werden:
   $\mathbb{P}(W = 2n) = \mathbb{P}(W \geq 2n) - \mathbb{P}(W \geq 2n+2)$[1]. In [1] wird angegeben, dass $\mathbb{P}(W \geq 2k) = \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{2^{2(k-1)}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}}\frac{1}{2n} &= \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} - \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \mid : \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{2^{2(n-1)}} \\
\frac{1}{2n} &= 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2(n-1)}{n-1}}\frac{2^{2(n-1)}}{2^{2n}} = 1 - \frac{1}{2^2}\frac{\frac{(2n)!}{n!*(2n-n)!}}{\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!*(2(n-1)-(n-1))!}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^2}\frac{(2n)!}{(2(n-1))!}\frac{((n-1)!)^2}{(n!)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{2^2}\frac{(2(n-1))! * (2n-1) * 2n}{(2(n-1))!}(\frac{(n-1)!}{(n-1)! * n})^2 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{2n-1}{n} = \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

2. $\mathbb{P}(W = \infty) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(W \geq 2k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{2(k-1)}{k-1}}{2^{2(k-1)}} = 0$
   $\Rightarrow \mathbb{P}(W < \infty) = 1$

□

Aus Satz 2 2. folgt, dass ein symmetrischer eindimensionaler Zufallsweg in jedem Fall irgendwann wieder zum Nullpunkt zurückkehrt. Außerdem gilt mit Satz 2 3., dass $\mathbb{E}(N) = \infty$ für Anzahl an Nullstellen N eines unbeschränkten Zufallsweges.

In einem beschränkten Zufallsweg der Länge $2n$ wird der Zeitpunkt der letzte Nullstelle durch $L_{2n} = \max\{2j : j \in \{0, 1, ..., n\}, s_{2j} = 0\}$ beschrieben.

Satz 3:

1. $L_{2n} = 0 \Rightarrow$ Zufallsweg hat keine Nullstelle (außer Startpunkt)
2. $\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \frac{\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}}$
3. $\mathbb{E}(L_{2n}) = n$

[1] Die nachfolgende Berechnung war nicht in der Literatur zu finden und wurde von mir selbst bestimmt

Beweis:

1. Dies gilt nach der Definition einer Nullstelle eines Zufallsweges.
2. Um zu beweisen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Nullstelle bei $2k$ liegt, wird der Zufallsweg in zwei Teilwege geteilt. Der erste Teilweg ist ein Brückenweg der Länge $2k$ und der zweite Teilweg ein nullstellenfreier Zufallsweg der Länge $2(n-k)$. Dieser Zufallsweg hat seine letzte Nullstelle genau im Schritt $2k$. Die Wahrscheinlichkeit für so einen Zufallsweg entspricht dem Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten für die beiden Teilwege, da die einzelnen Schritte unabhängig sind. Dafür wird jeweils die Anzahl der „günstigen" durch die Anzahl der „möglichen" Zufallswege geteilt. $\Rightarrow \mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = \frac{|W_{2k}^\circ|}{2^{2k}} \frac{|W_{2(n-k),\neq 0}|}{2^{2(n-k)}} = \frac{|W_{2k}^\circ||W_{2(n-k),\neq 0}|}{2^{2n}} \overset{\text{Lemma2}}{=} \frac{\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}}{2^{2n}}$
3. Für $k = n-k$ gilt $\mathbb{P}(L_{2n} = 2(n-k)) = \frac{|W_{2(n-k),\neq 0}|}{2^{2(n-k)}} \frac{|W_{2k}^\circ|}{2^{2k}}$ und $\mathbb{P}(L_{2n} = 2(n-k)) = \mathbb{P}(2n - L_{2n} = 2k)$.
   Daraus folgt, dass L_{2n} und $2n - L_{2n}$ die gleiche Verteilung und den gleichen Erwartungswert besitzen und dass $\mathbb{E}(L_{2n}) = 2n - \mathbb{E}(L_{2n})$
   $\Rightarrow \mathbb{E}(L_{2n}) = n$

□

Extremwerte

Hier werden nur Maxima betrachtet, da aufgrund des Spiegelungsprinzip das Gleiche für Minima gilt.

Die Maxima eines Zufallswegs werden durch $M_n := max\{S_0, S_1, ..., S_n\}$ beschrieben.
$D_n := \{k \in \{0, 1, ..., n\} : S_k = M_n\}$ heißt Menge der Maximalstellen des Zufallsweges W_n.
$Q_n := |D_n| = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}\{S_k = M_n\}$ heißt Anzahl der Maximalstellen des Zufallsweges W_n.

Satz 4:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Maximum eines n-Zufallswegs bei k liegt entspricht $\mathbb{P}(M_n = k) = \frac{1}{2n}\binom{n}{\lfloor\frac{n+k+1}{2}\rfloor}, n \geq 1,\ k = 1, ..., n.$

2. Ein Zufallsweg hat mit Wahrscheinlichkeit
$\mathbb{P}(Q_n \geq k+1) = \frac{1}{2^k}\ \mathbb{P}(M_{n-k} \geq k) = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\begin{array}{c} n-k \\ \lfloor\frac{n-k+j+1}{2}\rfloor \end{array}\right),$
$n \geq 0, 0 \leq k \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ mindestens $k+1$ Nullstellen.

$E_{2n} := min\{k \in \{0, 1, ..., 2n\} : S_k = M_{2n}\}$ heißt die erste Maximalstelle des Zufallsweges W_{2n}.

Satz 5:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Maximalstelle bei 0 liegt entspricht $\mathbb{P}(E_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Nullstelle bei $2l$ liegt entspricht $\mathbb{P}(E_{2n} = 2l) = \frac{1}{2}\frac{\binom{2l}{l}}{2^{2l}}\frac{\binom{2(n-l)}{(n-l)}}{2^{2(n-l)}}$

Beweis von Teil 1:

Die Zufallswege mit dem ersten Maximum bei 0 sind alle nichtpositiven Zufallswege. Laut Lemma 2 gibt es genau $\binom{2n}{n}$ davon. Geteilt durch die Anzahl aller möglichen Zufallswege dieser Länge errechnet sich die Wahrscheinlichkeit.

□

Leiterzeitpunkte

$V_k := inf\{n \geq 1 : S_n = k\}$ ist der erste Zeitschritt, an dem der Zufallsweg die Höhe k erreicht.

Satz 6:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsweg nach genau $2k+1$ Schritten die Höhe 1 zum ersten Mal erreicht ist
$\mathbb{P}(V_1 = 2k+1) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\frac{1}{2(k+1)}, k \geq 0.$

2. Der Zufallsweg erreicht die Höhe 1 in jeden Fall, da $\mathbb{P}(V_1 < \infty) = 1$.

3. Die durchschnittliche Dauer bis ein Zufallsweg die Höhe 1 erreicht ist unendlich lang, da $\mathbb{E}(V_1) = \infty$.

4. Auch jede andere Höhe wird durch den Zufallsweg erreicht, da $\mathbb{P}(V_k < \infty) = 1, k \in \mathbb{N}$.

Schnittpunkte zwischen Zufallswegen

Damit sich zwei Zufallswege in einem Schritt schneiden können müssen beide Anfangspunkte die gleiche Parität haben. Dies kann mit der Annahme sichergestellt werden, dass Zufallsweg 1 in 0 und Zufallsweg 2 in Höhe $2k$ startet.
Bei beiden Zufallswegen muss die gleiche Wahrscheinlichkeit für Vor- und Rückschritte gelten, das heißt die Zufallsvariablen der Schritte sind identisch verteilt. Die jeweilige Höhe der Zufallswege zum Zeitpunkt n heißt S_n bzw. S_n^*.

Der Distanz-k-Schnittzeitpunkt
$T_k := \inf\{n \geq 1 : S_n^* = S_n\} = inf\{n \geq 1 : \Delta_n = 2k\}$
bezeichnet den ersten Zeitpunkt, an dem sich zwei Zufallswege die in einem Abstand von $2k$ starten, zum ersten Mal schneiden. Dabei gilt: $\delta_j = X_j - X_j^*, X_j^{(*)} \in \{1, -1\}$ und $\Delta_n = \delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n, j \geq 1, n \geq 1$

Satz 7:

> Die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Zufallswege mit Abstand $2k$ nach n Schritten zum ersten Mal schneiden liegt bei
> $\mathbb{P}(T_k = n) = \frac{k}{n} \frac{\binom{2n}{n+k}}{2^{2n}}, n \in \mathbb{N}$

2.2 asymmetrischer Fall

Genauso wie im symmetrischen Fall startet ein asymmetrischer Zufallsweg im Nullpunkt und der jeweils nächste Schritt wird durch die Zufallsvariable X_j, modelliert . Allerdings gilt im Gegensatz dazu, dass
$\mathbb{P}(X_j = 1) \neq \mathbb{P}(X_j = -1)$. Deswegen heißen diese Zufallswege asymmetrisch. Für die Simulation gilt, dass
$\mathbb{P}(X_j = 1) = p, p \in (0, 1)$ und $\mathbb{P}(X_j = -1) = q = 1 - p$.

Durch das Beobachten einer linearen Trendfunktion kann bestimmt werden, wohin sich der zugehörige Zufallsweg langfristig bewegen wird. Bei dem symmetrischen Modell in Abbildung 8 zeigt sich, dass die monoton steigenden und fallenden Trendlinien annähernd gleich häufig vorkommen. Im Gegensatz dazu ist bei dem asymmetrischen Modell in Abbildung 9 eine deutliche Verschiebung dieses Verhältnisses zu erkennen.
Da die Wahrscheinlichkeit für einen Vorwärtsschritt p der größere Wert

ist, entspricht dieses Beispiel in so weit der Erwartung, dass die Mehrzahl der beobachteten Zufallswege einen positiven Trend aufweist.

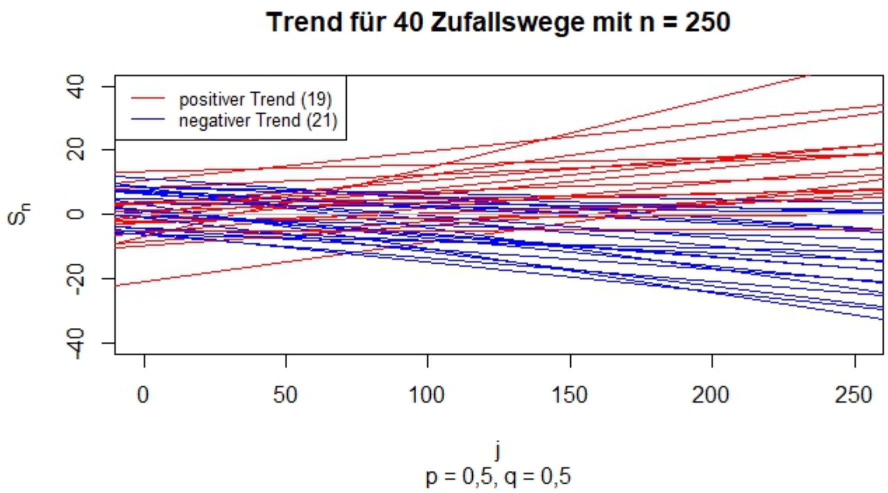

Abbildung 8: Trends für 40 symmetrische Zufallswege

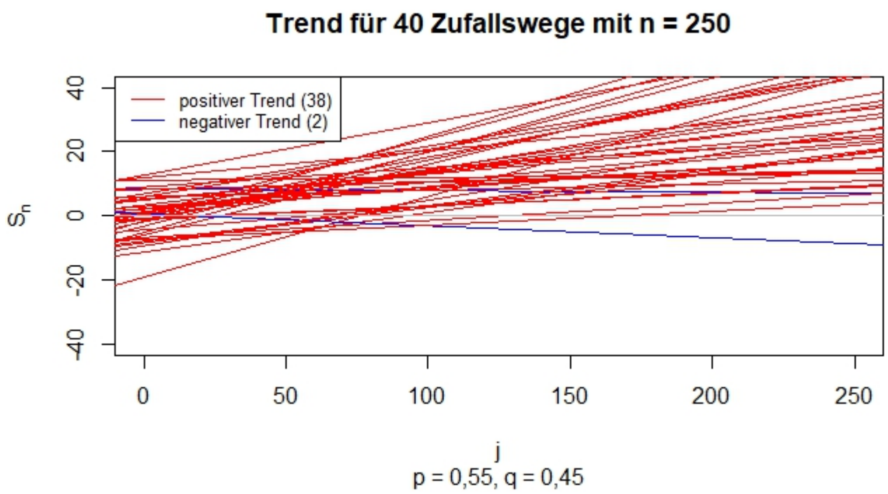

Abbildung 9: Trends für 40 asymmetrische Zufallswege

Leiterzeitpunkte

Hier interessiert vor allem der erste Leiterzeitpunkt $V_1 := inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$, denn das unterscheidet sich von den symmetrischen Zufallswegen.

Satz 8:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zufallsweg die Höhe 1 erreicht hängt von p und q ab: $\mathbb{P}(V_1 = 2k-1) = \frac{1}{q^k}\binom{2k-2}{k-1}(pq)^k, k \geq 1$
2. Im Gegensatz zu den symmetrischen Zufallswegen ist es hier nicht mehr fast sicher, dass der Zufallsweg die Höhe 1 erreicht.
   $\mathbb{P}(V_1 = \infty) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \geq 0,5 \\ 1 - \frac{p}{q}, & \text{falls } p < 0,5 \end{cases}$
3. Dafür muss ist der Erwartungswert in einigen Fällen auch kleiner als unendlich: $\mathbb{E}(V_1) = \begin{cases} \frac{1}{p-q}, & \text{falls } p > 0,5 \\ \infty, & \text{falls } p \leq 0,5 \end{cases}$

Nullstellen

N sei die Anzahl der Nullstellen eines unbeschränkten Zufallweges.

Die Wahrscheinlichkeit genau k Nullstellen zu haben, unterscheidet sich massiv von den symmetrischen Zufallswegen, da diese immer unendlich viele Nullstellen bei einem unbeschränkten Zufallswegen haben.

Satz 9:

1. Auch der Erwartungswert für die Anzahl der Nullstellen hängt von p und q ab: $\mathbb{E}(N) = \frac{1}{|p-q|} - 1$
2. Bei asymmetrischen Zufallswegen gibt es auch eine Teilmenge mit einer endlichen Anzahl an Nullstellen:
   $\mathbb{P}(N = k) = |p-q|(1-|p-q|)^k$.

Im Gegensatz zu den symmetrischen Zufallswegen gilt für
$T := \inf\{2k : k \in \mathbb{N} \text{ und } S_{2k} = 0\}$

Satz 10:

1. Wie bei den Leiterzeitpunkten ist auch bei den Nullstellen nicht fast sicher, dass ein asymmetrischer Zufallsweg eine Nullstelle erreicht:
   $P(T < \infty) < 1$
2. Die genaue Wahrscheinlichkeit für das erreichen von mindestens einer Nullstelle hängt von p und q ab:
   $P(T < \infty) = 1 - |p-q| = 1 - |2p-1|$

3 Mehrdimensionale Zufallswege

Mehrdimensionale Zufallswege bewegen sich auf einem ganzzahligen Gitter $\mathbb{Z}^d := \{k := (k_1, ..., k_d) | k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \cdots, d\}$. Auch diese starten im Nullpunkt $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ und sind gedächtnislos. Um sich zu bewegen kann der Standort in jedem Zeitschritt von dem aktuellen Standort k mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2d}$ zu einem der $2d$ Nachbarpunkten gelangen.

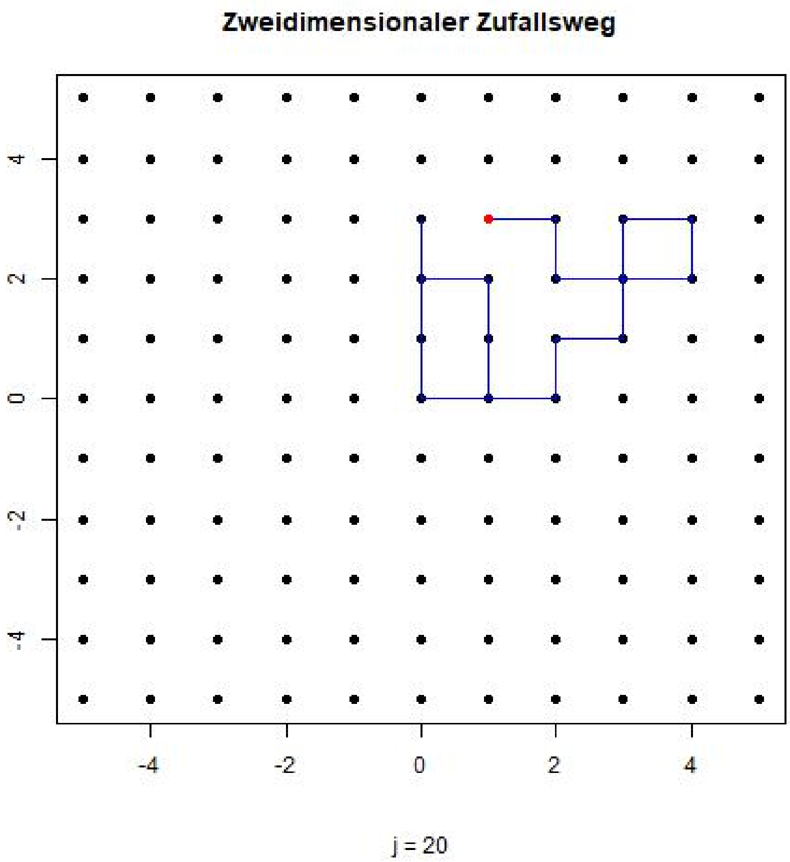

Abbildung 10: zweidimensionaler Zufallsweg nach 20 Schritten

Erstwiederkehr

Die Erstwiederkehr beschreibt den Zeitpunkt, an dem der Zufallsweg zum ersten Mal wieder zum Nullpunkt zurückkommt:
$T = inf\{2k : k \in \mathbb{N}, S_{2k} = 0\}$

Bei einem symmetrischen eindimensionalen Zufallsweg gilt $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

Bei höheren Dimensionen ändert sich das:
Satz 11:
Für die Erstwiederkehrzeit einer symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ gelten:
Für ein- und zweidimensionale Zufallswege kommt der Zufallsweg mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder zum Nullpunkt zurück:
$\mathbb{P}(T < \infty) = 1, \text{falls } d \leq 2.$
Bei höherdimensionalen Zufallswegen gibt es eine Teilmenge, deren Zufallswege nicht wieder zum Nullpunkt zurückkommen:
$\mathbb{P}(T < \infty) < 1, \text{falls } d \geq 3.$[6]

Diese Ausarbeitung soll mit einem Zitat von Shizuo Kakutani abgeschlossen werden. [2]

> Ein betrunkener Mensch findet nach Hause, aber ein betrunkener Vogel kann für immer verloren gehen.

[2] Zu diesem Zitat gibt es leider keine offizielle Quelle, aber da es in vielen Vorlesungen genutzt wird und keine inhaltliche Bedeutung hat, möchte ich es hier trotzdem gerne als Abschluss nutzen.

Literatur

[1] Norbert Henze. *Irrfahrten - Faszination der Random Walks*. Springer Spektrum, 2018.

[2] Karl Pearson. The problem of the random walk. *Nature*, 72(1865), 1905.

[3] Rayleigh. The problem of the random walk. *Nature*, 72(1866), 1905.

[4] Karl Pearson. The problem of the random walk. *Nature*, 72(1867), 1905.

[5] Harald Nahrstedt. *Die Monte-Carlo-Methode*. Springer-Verlag, 2015.

[6] Georg Pólya. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Mathematische Annalen*, 84, 1921.